LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE
2017. DECEMBER 09.
X. OSZTÁLY

1.Feladat 1 pont hivatalból

Igazold, hogy, bármely $a,b,c\in(1,\infty)$ esetén :

$$\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\geq\frac{9}{2\cdot(a+b+c)}$$

Megoldás:

$$\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\quad(1)$$ 3 pont

De $(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$. 3 pont

Ezt felhasználva (1) ben az állítás igaz. 3pont

2.Feladat 1 pont hivatalból

Határozzuk meg a $z\in C^*$ számokat, tudva, hogy $r\in[2,\infty)$ és

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|=r$$

Megoldás:

$$\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|=\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot\left|z^2+\frac{1}{z^2}-1\right|=r\left|z^2+\frac{1}{z^2}-1\right|=r\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right|=r$$

$$\Rightarrow\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right|=1$$

2 pont

Legyen $\alpha=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$, tehát $|\alpha-3|=1\ (1)$ 1 pont

$$|\alpha|=\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|^2=r^2\geq 4\ \ (2)$$ 1 pont

De $|\alpha|=|\alpha-3+3|\leq|\alpha-3|+3=4\ (3)$ 1pont

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

$(2)(3) \Rightarrow |\alpha| = 4\ (4)$ 1 pont

Legyen $\alpha = a + bi, a, b \in R$

$(1)(4) \Rightarrow a = 4, b = 0 \Rightarrow \alpha = 4$ 1 pont

Tehát $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = 4 \Rightarrow z+\frac{1}{z} = 2 \Rightarrow z = 1$ vagy $z+\frac{1}{z} = -2 \quad \Rightarrow z = -1$

$M = \{-1, 1\}$ 2 pont

3.Feladat 1 pont hivatalból

Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c, ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.A háromszög beirható körének középpontján átmenő, a b oldallal párhuzamos egyenes a háromszöget két részre bontja. Mekkora e két rész területének aránya?

Megoldás:

Legyen az a, b, c számtani sorozat, különbsége d. 1 pont

OA, OB, OC szögfelezők, PQ párhuzamos $AC-$vel $O \in PQ \Rightarrow P\hat{O}C \equiv O\hat{C}A \equiv O\hat{C}P \Rightarrow OPC \triangleleft$ egyenlő szárú. Legyen $PO = PC = x$ 1 pont

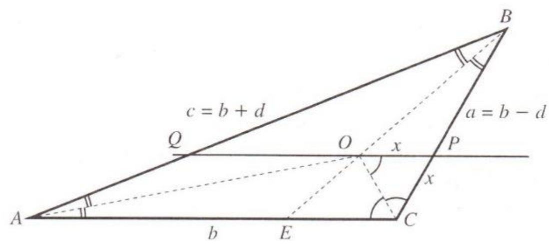
$BOP \triangleleft \approx BEC \triangleleft \Rightarrow \frac{x}{EC} = \frac{BP}{BC} = \frac{b-d-x}{b-d}\ (1)$ 1 pont

BE szögfelező: $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{b-EC}{EC} = \frac{b+d}{b-d} \Rightarrow EC = \frac{b-d}{2}\ (2)$ 2 pont

$(1)(2) \Rightarrow \frac{x}{\frac{b-d}{2}} = \frac{b-d-x}{b-d} \Rightarrow x = \frac{b-d}{3}\ (b \neq r)$ 1 pont

$\Rightarrow BP = \frac{2}{3}BC$, tehát a hasonló háromszögek hasonlósági aránya $\frac{2}{3}$ 1 pont

$\Rightarrow \frac{T_{BPQ\triangleleft}}{T_{BAC\triangleleft}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{T_{BPQ\triangleleft}}{T_{ACPQ}} = \frac{4}{5}$. 1 pont



1 pont

4.Feladat 1 pont hivatalból

Egy 70 cm oldalhosszúságú négyzet alakú céltáblába 50 lövést adunk le. Jól célzunk, egyetlen lövésünk sem kerüli el a táblát. Igazoljuk, hogy a találati pontok között van két olyan, amelyek távolsága kisebb, mint 15 cm.

Megoldás:

A tábla területe $4900cm^2$, felosztjuk 49 darab $100cm^2$-es négyzetre. 2 pont

Tehát a skatulyaelv alapján van olyan négyzet melyen 2 találati pont van. 3 pont

Mivel a négyzet átlója $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ 1 pont

van 2 olyan találat, hogy távolságuk kisebb 15 cm-nél. 3 pont